



N.º 27 – SIMULAÇÃO: DUAS TAREFAS

Por: Maria Eugénia Graça Martins

Departamento de Estatística e Investigação Operacional da FCUL

memartins@fc.ul.pt

Emília Oliveira

ecmo.estp@gmail.com

UM PROCESSO de obter uma estimativa para a probabilidade de um acontecimento é repetir um grande número de vezes a experiência conducente à



realização desse acontecimento e calcular a frequência relativa com que o acontecimento se verificou¹. Quando não é possível ou não é prático repetir a realização do fenómeno, simulamos a sua realização.

A SIMULAÇÃO é um processo artificial de representar a realização de um fenómeno aleatório², que, sobretudo nas três últimas

décadas, com o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos computadores, contribuiu de forma decisiva para o estudo de leis da probabilidade e cálculo de probabilidades associadas a determinados acontecimentos. Nesta ActivALEA são apresentadas duas tarefas em que se estima, por simulação, a probabilidade de alguns acontecimentos, utilizando para isso aplicações informáticas³.

Lançar Moeda



¹ Consultar ActivALEA n.º 26 - A frequência relativa para estimar a probabilidade.

² Um fenómeno aleatório é um fenómeno para o qual não sabemos de antemão o que vai acontecer, na próxima repetição, mas para o qual é possível verificar uma certa *regularidade a longo termo*, ou seja, para um grande número de repetições do fenómeno.

³ Consultar outros exemplos na ActivALEA n.º 18 - Probabilidade: Problemas e Simulações.

TAREFA - Qual a probabilidade de no lançamento de uma moeda de um euro seis vezes, se verificarem pelo menos três faces Euro seguidas?⁴

Numa aula, o professor escreveu no quadro várias sequências de E (Euro) e N (Nacional) que pretendiam representar o resultado do lançamento de uma moeda equilibrada de um euro 6 vezes. As sequências escritas foram:

EENEEN EEENEN ENENEN NEENNN NNENNN

1. Uma destas sequências foi inventada pelo professor. Na tua opinião, qual é a mais provável de ter sido inventada?
2. Será mais frequente observar uma sequência de 6 lançamentos em que se verificam pelo menos 3 faces Euro seguidas ou uma sequência em que haja alternância da face Euro com a face Nacional nos 6 lançamentos?
3. Estima a probabilidade de, no lançamento da moeda seis vezes, se verificar o acontecimento “pelo menos três faces Euro seguidas”. Para tal, repete a experiência muitas vezes e calcula a frequência relativa desse acontecimento. As experiências têm de ser repetidas até a frequência relativa estabilizar.

Mas realizar a experiência muitas vezes pode levar muito tempo, pois estar a repetir a experiência de lançar a moeda seis vezes, ver o que acontece, outras seis vezes e ver o que



acontece, e assim por diante até que a frequência relativa estabilize, não vai ser fácil... Para ajudar-te a simular a experiência, utiliza a aplicação interativa “Moedas” que acompanha esta ActivALEA. Nesta aplicação, a expressão “lançar a moeda” corresponde à experiência de lançar a moeda seis vezes seguidas.

Regista os resultados obtidos e apresenta uma estimativa da probabilidade pedida, a que se dá o nome de **probabilidade experimental do acontecimento**.

Sugestão: Para o registo dos resultados, utiliza uma folha de Excel, onde numa 1ª coluna anotas o número da experiência, numa 2ª coluna registas 1 se se verificou o acontecimento de interesse (3 ou mais faces Euro seguidas), numa 3ª coluna registas a frequência absoluta acumulada e, finalmente, numa 4ª coluna registas a evolução da frequência relativa à medida que o número de provas aumenta. Podes depois apresentar os resultados num gráfico de linha em que no eixo das abcissas colocas o número das sucessivas experiências e no eixo das ordenadas colocas a frequência relativa.

⁴ Retirada da Brochura *Organização e Tratamento de Dados*, acessível em http://area.dgicd.min-edu.pt/materiais_NPMEB/matematicaOTD_Final.pdf

Tarefa – Quem é que recebe mais comida? ⁵

No jardim zoológico existem seis leões, cada um na sua jaula. O tratador resolveu arranjar um processo de dar a comida aos leões, no qual cada pedaço de carne passa por cinco prateleiras até chegar a um leão. Em cada prateleira, o pedaço de carne pode escorregar para a prateleira da direita ou da esquerda com igual probabilidade.



O tratador estava convencido de que, depois de fazer escorregar vários pedaços de carne, todos os leões teriam mais ou menos a mesma quantidade de comida, já que, para chegar do tratador a cada leão, cada pedaço de carne tem de passar pelo mesmo número de prateleiras. Acontece que, passados vários dias, uns leões estavam mais gordos do que outros e havia alguns que estavam mesmo a definhar! Consegues demonstrar ao tratador que este processo de lançar a comida aos leões é capaz de não ser bom?

Utilizando a aplicação interativa “Leões”, simula o lançamento de vários pedaços de carne e verifica se existem algumas posições onde seja mais provável a carne chegar, relativamente às outras posições.

Regista os resultados obtidos e apresenta as tuas conclusões.

⁵ Retirada da Brochura *Organização e Tratamento de Dados*, acessível em http://area.dgdc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/matematicaOTD_Final.pdf

ANEXO

TAREFA - Qual a probabilidade de no lançamento de uma moeda de um euro seis vezes, se verificarem pelo menos três faces Euro seguidas?

A maioria dos alunos tende a exprimir as suas conclusões não em termos de “a mais provável de ter sido inventada”, mas de “a menos provável de ter sido inventada”, utilizando o seguinte raciocínio: se a moeda é equilibrada, então existe igual possibilidade de sair face Euro ou face Nacional, pelo que, nos 6 lançamentos, espera-se igual número de faces Euro e faces Nacional! Além disso, 3 faces Euro ou 3 faces Nacional seguidas é pouco provável...! Habitualmente, concluem que o mais razoável é que a sequência não inventada fosse ENENEN.

Acontece que o raciocínio anterior está longe de estar correto! Numa sequência de 6 lançamentos, não se pode esperar a regularidade que se espera numa sequência de muitos lançamentos. O facto de a moeda ser equilibrada significa que, depois de muitas repetições, a frequência com que se verifica a face Nacional é aproximadamente igual à frequência com que se verifica a face Euro. Chamamos a atenção para que, quando nos referimos à frequência, estamos a referir-nos à frequência relativa, pois, à medida que o número de repetições aumenta, a frequência absoluta não obedece a nenhuma regularidade. Por outro lado, embora seja pouco intuitivo, é bem mais frequente observar uma sequência de 6 lançamentos em que se verificam pelo menos 3 faces Euro seguidas do que uma sequência em que haja alternância da face Euro com a face Nacional nos 6 lançamentos. Para vermos como a nossa intuição nos engana com frequência, simulou-se a experiência 5000 vezes e obteve-se como estimativa para a probabilidade de pelo menos 3 faces Euro seguidas o valor de 31%, ao passo que uma estimativa para a probabilidade de obter uma sequência de 6 faces alternadas foi 3%!

A resolução teórica deste problema não é muito complicada, pois a única dificuldade consiste em listar todos os casos possíveis que se podem verificar nos 6 lançamentos e, desses 64 ($=2^6$) casos possíveis, registar quantos são favoráveis à realização do acontecimento em causa. Depois, basta aplicar a regra de Laplace. Apresenta-se de seguida uma lista dos resultados com 3 ou mais faces Euro seguidas:

EEEEEE EEEENE EEENEE EENEEE ENEEEE NEEEEE
EEEENN EEENEN ENEEEN NEEEEN EEENNE ENNEEE NNEEEE NENEEE NEEENE
EEENNN NEEENN NNEEEN NNNEEE

Como os resultados são todos igualmente possíveis, estamos em condições de utilizar a regra de Laplace. Assim:

$$P(\text{pelo menos 3 faces E seguidas}) = \frac{\text{nº resultados favoráveis}}{\text{nº resultados possíveis}} = \frac{20}{64} = 0,3125$$

Para obter a probabilidade do acontecimento “faces alternadas nos 6 lançamentos”, basta verificar que os únicos resultados favoráveis são ENENEN ou NENENE, pelo que:

$$P(\text{faces alternadas}) = \frac{2}{64} = 0,03125$$

Como se verifica, a probabilidade de obter pelo menos 3 faces Euro seguidas é aproximadamente igual a 31%, enquanto a probabilidade de obter faces alternadas é aproximadamente igual a 3%.

Tarefa – Quem é que recebe mais comida?

Cada pedaço de carne tem de percorrer 5 prateleiras. Assim:

- Se virar 5 vezes para a direita, vai parar ao leão da jaula 1 (1.º leão a contar da esquerda);
- Se virar 4 vezes para a direita e 1 vez para a esquerda em qualquer das prateleiras, vai parar ao leão da jaula 2;
- Se virar 3 vezes para a direita e 2 vezes para a esquerda em qualquer das prateleiras, vai parar ao leão da jaula 3;
- Se virar 2 vezes para a direita e 3 vezes para a esquerda em qualquer das prateleiras, vai parar ao leão da jaula 4;
- Se virar 1 vez para a direita e 4 vezes para a esquerda em qualquer das prateleiras, vai parar ao leão da jaula 5;
- Se virar 0 vezes para a direita e 5 vezes para a esquerda, vai parar ao leão da jaula 6.



Simulámos a experiência 5000 vezes e comprovámos que os leões não estavam a ser alimentados em igual proporção. Efetivamente, os leões das jaulas 3 e 4 recebiam mais de 60% da comida, enquanto os das jaulas 1 e 6 recebiam aproximadamente 6%.

A resolução teórica deste problema é simples utilizando a regra ou lei de Laplace. Basta considerar as diferentes sequências DDDDD, DDDDE, DDDDE, ..., EEEEE que representam todos os caminhos possíveis que conduzem a comida aos leões, em que se representa por D “virar à direita” e por E “virar à esquerda”. Todos os caminhos anteriores, em número de 32

($=2^5$), são igualmente possíveis, pois existe igual probabilidade de virar à esquerda ou à direita. O número de caminhos que levam a cada um dos leões é igual a C_{i-1}^5 , onde representamos por i , com $i=1, 2, 3, 4, 5$ e 6 , o número dos leões, numerados da esquerda para a direita. Assim, $P(\text{carne chegar ao leão } i) = \frac{C_{i-1}^5}{32}$, calculando a probabilidade como sendo o quociente entre o número de resultados (ou casos) favoráveis e o número de resultados (ou casos) possíveis. Utilizando a fórmula anterior, obtém-se:

$$P(\text{carne chegar ao leão } 1) = \frac{C_0^5}{32} = \frac{1}{32} \approx 3\%$$

$$P(\text{carne chegar ao leão } 2) = \frac{C_1^5}{32} = \frac{5}{32} \approx 16\%$$

$$P(\text{carne chegar ao leão } 3) = \frac{C_2^5}{32} = \frac{10}{32} \approx 31\%$$

$$P(\text{carne chegar ao leão } 4) = \frac{C_3^5}{32} = \frac{10}{32} \approx 31\%$$

$$P(\text{carne chegar ao leão } 5) = \frac{C_4^5}{32} = \frac{5}{32} \approx 16\%.$$

3