TarefALEA - Probabilidade

N.º 2 – O jogo de basquetebol do João

O João gosta muito de jogar basquetebol, mas não é muito habilidoso, pois, em média, falha metade das bolas que tenta encestar. Por mais que treine, só acerta metade dos lançamentos...

Estava a conversar com o seu amigo Pedro sobre esta sua falta de habilidade. Então, o Pedro, que gosta muito de desafios relacionados com a Probabilidade, decidiu estudar o comportamento aleatório dos lançamentos sucessivos do João, começando por fazê-lo relativamente a 6 lançamentos sucessivos [1].

Questão a investigar

Quantos encestamentos seguidos conseguirá o João em 6 lançamentos sucessivos?

O João ficou muito entusiasmado com a proposta do Pedro, mas de repente lembrou-se de que, para ele, intuitivamente, a expressão "*probabilidade de um acontecimento*" estava associada à percentagem de vezes que o acontecimento se verificava, numa longa série de repetições do fenómeno aleatório que conduzisse à sua realização! Seria necessário fazer muitas e muitas séries de 6 lançamentos ao cesto, para recolher os dados necessários, o que o deixaria de rastos...

Partilhou com o amigo esta sua preocupação, mas imediatamente o Pedro o sossegou! Lembrou-lhe que a tecnologia permite **simular** o comportamento de um fenómeno aleatório, sem estar "fisicamente" a realizar as várias experiências aleatórias, permitindo obter uma estimativa para a probabilidade do acontecimento se realizar.

[1] Imagem adaptada de https://www.pexels.com/search/basketball/

Mas o Pedro não se ficou por aqui... Acrescentou que, em determinadas situações, muito específicas, poder-se-ia obter o valor da Probabilidade de um acontecimento, utilizando a regra de Laplace!

O João ficou muito admirado com a sabedoria do Pedro e decidiram, em conjunto, estudar as duas abordagens ao problema – a **interpretação frequencista (empírica)** e a **interpretação clássica (teórica) ou laplaciana** de Probabilidade!

Metodologia a seguir...

1. Abordagem **frequencista** de **Probabilidade -** Simular a experiência aleatória que consiste em lançar a bola ao cesto e obter uma estimativa para a probabilidade de, em 6 lançamentos seguidos, introduzir a bola no cesto:
   a) Pelo menos 2 vezes seguidas;
   b) Pelo menos 3 vezes seguidas;
   c) Pelo menos 4 vezes seguidas;
   d) Pelo menos 5 vezes seguidas;
   e) Em todos os lançamentos;
   f) Alternadamente um encestamento e um não encestamento.
2. Abordagem **clássica (ou teórica) ou laplaciana** de **Probabilidade -** Obter a probabilidade (teórica) para todos os acontecimentos considerados nas alíneas da questão anterior.
3. Comparar os resultados obtidos em 1. e 2..

Vamos ao trabalho!

1. Abordagem frequencista

Para simular a experiência dos 6 lançamentos do João, pode-se considerar uma folha de Excel, em que se utiliza a seguinte metodologia:

i) Em 6 colunas do Excel, geram-se 6 números aleatórios[2] entre 0 e 1, utilizando a função RAND().

[2] Mais corretamente, os números são pseudo-aleatórios, já que são gerados por um algoritmo matemático, comportando-se, no entanto, como se fossem aleatórios.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1	2	3	4	5	6	
2	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	
3	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	
4	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	
5	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	
6	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	
7	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	=RAND()	

ii) Nas 6 colunas seguintes utilizando a função IF, testa-se se cada valor gerado é inferior a 0,5 (o que se verifica com probabilidade 50%, tendo em consideração as características da função RAND()), caso em que se considera que se verificou um encestamento e se representa por E. No caso contrário, representa-se por N (não encestamento).

	G	H	I	J	K	L	M
1							
2		=IF(A2<0,5;"E";"N")	=IF(B2	=IF(C2	=IF(D2	=IF(E2	=IF(F2<0,5;"E";"N")
3		=IF(A3<0,5;"E";"N")	=IF(B3	=IF(C3	=IF(D3	=IF(E3	=IF(F3<0,5;"E";"N")
4		=IF(A4<0,5;"E";"N")	=IF(B4	=IF(C4	=IF(D4	=IF(E4	=IF(F4<0,5;"E";"N")
5		=IF(A5<0,5;"E";"N")	=IF(B5	=IF(C5	=IF(D5	=IF(E5	=IF(F5<0,5;"E";"N")
6		=IF(A6<0,5;"E";"N")	=IF(B6	=IF(C6	=IF(D6	=IF(E6	=IF(F6<0,5;"E";"N")
7		=IF(A7<0,5;"E";"N")	=IF(B7	=IF(C7	=IF(D7	=IF(E7	=IF(F7<0,5;"E";"N")

iii) Utilizando a função CONCAT, transformam-se as seis letras obtidas nas colunas H, I, ..., M, numa palavra mantendo a ordem pela qual as letras foram obtidas:

	N
1	
2	=CONCAT(H2;I2;J2;K2;L2;M2)
3	=CONCAT(H3;I3;J3;K3;L3;M3)
4	=CONCAT(H4;I4;J4;K4;L4;M4)
5	=CONCAT(H5;I5;J5;K5;L5;M5)
6	=CONCAT(H6;I6;J6;K6;L6;M6)
7	=CONCAT(H7;I7;J7;K7;L7;M7)

iv) Utilizando a função ISNUMBER, pesquisa-se na palavra da coluna N, a existência de “Pelo menos i E’s seguidos”, com $i = 1, \ldots, 6$. Se se verificar a condição, esta é assinalada com 1. Caso contrário, a célula fica vazia. Esta metodologia permite, no fim, contabilizar facilmente o número de sucessos.

	O	P	Q	R	S
1	Pelo menos 2 E seguidos	Pelo menos 3 E seguidos	Pelo menos 4 E seguidos	Pelo menos 5 E seguidos	6 E seguidos
2	=IF(ISNUMBER(FIND("EE";$N2));1;"")	=IF(ISNUMBER(FIND("EEE";$N2));1;"")	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMBER(FIND("EEEEEE";$N2));1;"")
3	=IF(ISNUMBER(FIND("EE";$N3));1;"")	=IF(ISNUMBER(FIND("EEE";$N3));1;"")	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMBER(FIND("EEEEEE";$N3));1;"")
4	=IF(ISNUMBER(FIND("EE";$N4));1;"")	=IF(ISNUMBER(FIND("EEE";$N4));1;"")	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMBER(FIND("EEEEEE";$N4));1;"")
5	=IF(ISNUMBER(FIND("EE";$N5));1;"")	=IF(ISNUMBER(FIND("EEE";$N5));1;"")	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMBER(FIND("EEEEEE";$N5));1;"")
6	=IF(ISNUMBER(FIND("EE";$N6));1;"")	=IF(ISNUMBER(FIND("EEE";$N6));1;"")	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMBER(FIND("EEEEEE";$N6));1;"")
7	=IF(ISNUMBER(FIND("EE";$N7));1;"")	=IF(ISNUMBER(FIND("EEE";$N7));1;"")	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMI	=IF(ISNUMBER(FIND("EEEEEE";$N7));1;"")

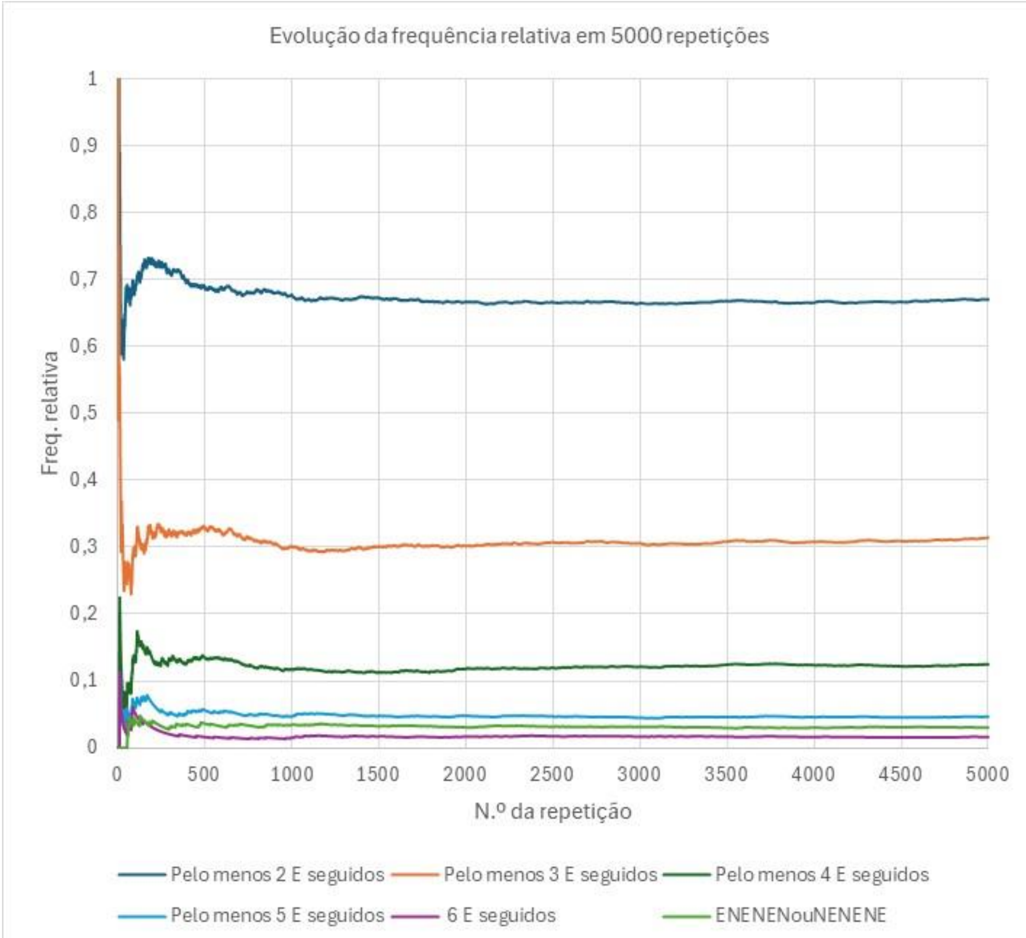
A pesquisa dos encestamentos alternados faz-se utilizando na função considerada na coluna S a cadeia ENENEN ou NENENE.

v) Apresenta-se a seguir o aspeto da folha de cálculo, sem ter as fórmulas visíveis:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
1	1	2	3	4	5	6									Pelo menos 2 E seguidos	Pelo menos 3 E seguidos	Pelo menos 4 E seguidos	Pelo menos 5 E seguidos	6 E seguidos	ENENEN	NENENE
2	0,83534	0,57341	0,28446	0,23109	0,60996	0,44628		N	N	E	E	N	E	NNEENE	1						
3	0,03774	0,03904	0,59429	0,67164	0,87224	0,23550		E	E	N	N	N	E	EENNNE	1						
4	0,40297	0,03102	0,29672	0,14912	0,12879	0,16119		E	E	E	E	E	E	EEEEEE	1	1	1	1	1		
5	0,96076	0,22845	0,51459	0,34511	0,95767	0,15721		N	E	N	E	N	E	NENENE							1
6	0,64295	0,37019	0,73468	0,19153	0,00477	0,52716		N	E	N	E	E	N	NENEEN	1						
7	0,40438	0,19336	0,98291	0,38680	0,41417	0,85503		E	E	N	E	E	N	EENEEN	1						

vi) Repete-se o processo um grande número de vezes, até as frequências relativas dos acontecimentos estabilizarem. Neste caso fizeram-se 5000 repetições, cujos resultados se apresentam na tabela e gráfico seguintes:

Acontecimento	Pelo menos 2 encestam. seguidos	Pelo menos 3 encestam. seguidos	Pelo menos 4 encestam. seguidos	Pelo menos 5 encestam. seguidos	6 encestam. seguidos	Escestam. alternados
Freq. relat. (%)	67,1%	31,4%	12,5%	4,7%	1,6%	3,0%



Nota – Chama-se a atenção para que os acontecimentos anteriores não são disjuntos.

2. Abordagem clássica ou laplaciana

Para calcular as probabilidades dos acontecimentos referidos, considerar o espaço de resultados associado à experiência aleatória que consiste em fazer 6 lançamentos seguidos e registar o que acontece, sabendo que em cada lançamento se pode verificar E – **E**ncestamento, ou N – **N**ão encestamento, com igual probabilidade. Este espaço de resultados é constituído pelos $2^6 = 64$ resultados de 6 carateres E's e N's, da forma

1.º lanç.	2.º lanç.	3.º lanç.	4.º lanç.	5.º lanç.	6.º lanç.
E ou N	E ou N	E ou N	E ou N	E ou N	E ou N

Aconselha-se a utilização de um diagrama em árvore para registar todos os resultados. Seguidamente, verifica-se quantos são os resultados favoráveis à realização de cada um dos acontecimentos cuja probabilidade se quer calcular. Por exemplo, os resultados EENENE e EEENEN, são favoráveis à realização do acontecimento “Pelo menos 2 encestamentos”. Apresenta-se a seguir uma tabela, com as frequências absolutas dos vários resultados possíveis, que vai permitir calcular as probabilidades pretendidas.

0 E'S	1 único E	2 E's seguidos	3 E's seguidos	4 E's seguidos	5 E's seguidos	6 E's seguidos	Alternados	Outras	Total
1	6	24	11	5	2	1	2	12	64

Exemplos de resultados satisfazendo as condições anteriores:

0 E's – NNNNNN.
1 único E - ENNNNN, NENNNN, etc.
2 E's seguidos – EENENN, EENEEN, etc.
3 E's seguidos – NENEEE, EENEEE, etc.
4 E's seguidos – NEEEEN, ENEEEE, etc.
5 E's seguidos – EEEEEN ou NEEEEE.
6 E's seguidos – EEEEEE.
Alternados – ENENEN ou NENENE.
Outras – NENENN, NENNNE, etc.

Utilizando a Regra de Laplace, vem:

$$P(\text{Pelo menos 2 encestam. seguidos}) = \frac{24+11+5+2+1}{64} = \frac{43}{64} = 0{,}672$$

$$P(\text{Pelo menos 3 encestam. seguidos}) = \frac{11+5+2+1}{64} = \frac{19}{64} = 0{,}297$$

$$P(\text{Pelo menos 4 encestam. seguidos}) = \frac{5+2+1}{64} = \frac{8}{64} = 0{,}125$$

$$P(\text{Pelo menos 5 encestam. seguidos}) = \frac{2+1}{64} = \frac{3}{64} = 0{,}047$$

$$P(\text{6 encestam. seguidos}) = \frac{1}{64} = 0{,}016$$

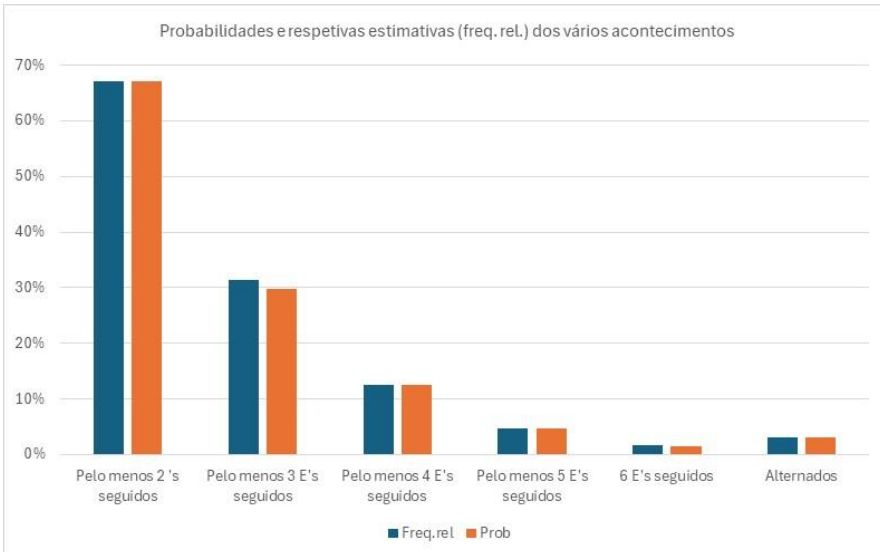
$$P(\text{encestam. alternados}) = \frac{2}{64} = 0{,}031$$

Agora é possível preencher uma tabela idêntica à considerada em 1., mas com as probabilidades:

Acontecimento	Pelo menos 2 encestam. seguidos	Pelo menos 3 encestam. seguidos	Pelo menos 4 encestam. seguidos	Pelo menos 5 encestam. seguidos	6 encestam. seguidos	Escestam. alternados
Probab. (%)	67,2%	29,7%	12,3%	4,7%	1,6%	3,1%

3. Comparação dos resultados obtidos para as probabilidades e respetivas estimativas

O gráfico seguinte, onde se comparam as probabilidades dos diferentes acontecimentos e as respetivas estimativas, permite-nos concluir que as estimativas estão muito próximas das probabilidades.



Mais...

Número de encestamentos em 6 lançamentos seguidos, feitos pelo João

Considerar a variável aleatória **C** que representa o número de encestamentos conseguidos pelo João em 6 lançamentos ao cesto. Admitir que, para cada lançamento, a probabilidade de encestar é igual à de não encestar, e que os lançamentos são independentes uns dos outros.

a) Obter o modelo de probabilidade de C.
b) Calcular o número médio de encestamentos em 6 lançamentos seguidos.

Resolução

a) Sendo C a v.a. que representa o número de encestamentos em 6 lançamentos, C pode assumir os valores inteiros de 0 a 6. O que se pretende é calcular as probabilidades $P(C=i)$, com $i=0,1,\ldots,6$, para obter a função massa de probabilidade.

$$P(C=0)=\frac{1}{2^6}$$

$P(C=1) = C_1^6 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5$

$P(C=2) = C_2^6 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$P(C=3) = C_3^6 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$P(C=4) = C_4^6 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$P(C=5) = C_5^6 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1$

$P(C=6) = \frac{1}{2^6}$

A partir das expressões anteriores, obtém-se a f.m.p. para a v.a. C:

$C=i$	0	1	2	3	4	5	6
$P(C=i)$	1,6%	9,4%	23,4%	31,3%	23,4%	9,4%	1,6%

b) O valor médio de uma variável aleatória é o equivalente à média quando temos os dados organizados numa tabela de frequências, com as frequências relativas. Assim,

$$\text{Valor médio}(C) = 0 \times 0{,}016 + 1 \times 0{,}094 + \ \dots + 5 \times 0{,}094 + 6 \times 0{,}016 = 3$$

Obteve-se que o valor esperado do número de encestamentos em 6 lançamentos é 3, como seria de esperar, tendo em consideração que a distribuição de probabilidade de C é simétrica, relativamente ao valor 3.