

TarefALEA - Probabilidade

N.º7 – O problema das 4 chaves



O João pediu ao pai que lhe emprestasse a casa de férias para fazer uma festa com os amigos, comemorando o seu aniversário. O pai prontificou-se a satisfazer o desejo do filho, mas aproveitou para lhe lançar o seguinte desafio:

– Tenho 4 chaves, aparentemente iguais, mas só uma abre a porta. Levas as 4 chaves e, se conseguires abrir a porta à primeira ou à segunda tentativa, empresto-te a casa para a festa e pago-te as despesas que fizeres! No entanto, se só abrires à terceira ou quarta tentativa, só te empresto a casa e pagas tu as despesas com as tuas economias!

O João ficou um pouco “desiludido”, pois a sua intuição dizia-lhe que seria mais provável acertar à terceira ou quarta tentativa do que à primeira ou segunda, pelo que certamente perderia a oportunidade de ter as despesas da festa pagas!¹

Afinal o que é que será mais provável?

Questão

Consideram-se 4 chaves, aparentemente iguais, mas em que só uma abre a porta.

- 1 - Tenta-se abrir a porta com uma das 4 chaves, escolhida ao acaso;
- 2 - Se não abrir a porta, descarta-se essa chave e faz-se uma segunda tentativa com uma das 3 chaves restantes;
- 3 - Se não abrir a porta, faz-se uma terceira tentativa com uma das 2 chaves restantes;
- 4 - Se não abrir a porta, faz-se uma quarta tentativa com a chave restante, que abre a porta, de certeza!

Qual a probabilidade de abrir a porta à 1.^a ou 2.^a tentativa?

Qual a probabilidade de abrir a porta à 3.^a ou 4.^a tentativa?

Esta questão pode ser respondida utilizando a interpretação **clássica** de Probabilidade e o conceito de probabilidade condicionada, a que se dará o nome de abordagem **teórica**, ou utilizando a abordagem **empírica** ou **frequencista**, para estimar a probabilidade.

¹ A imagem foi adaptada de <https://pixabay.com/pt/photos/chave-multicolorido-correspond%C3%A2ncia-74534/>.

Abordagem teórica

Representem-se as 4 chaves por Ch1, Ch2, Ch3 e Ch4. Sem perda de generalidade, admita-se que a chave que abre a porta é a chave representada por Ch1. Utilize-se a seguinte notação para significar que a chave certa é escolhida à 1.^a, 2.^a, 3.^a ou 4.^a tentativa: Ch1₁, Ch1₂, Ch1₃ e Ch1₄.

- Probabilidade de abrir a porta à 1.^a tentativa:

$$P(\text{Ch1}_1) = \frac{1}{4}$$

- Probabilidade de abrir a porta à 2.^a tentativa:

$$\begin{aligned} P(\text{Não escolher Ch1}_1 \text{ e Escolher Ch1}_2) &= P(\text{Não escolher Ch1}_1) \times P(\text{Escolher Ch1}_2 | \text{Não escolheu Ch1}_1) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Probabilidade de abrir a porta à 3.^a tentativa:

$$\begin{aligned} P(\text{Não escolher Ch1}_1 \text{ e Não escolher Ch1}_2 \text{ e Escolher Ch1}_3) &= P(\text{Não escolher Ch1}_1) \\ &\quad \times P(\text{Não escolher Ch1}_2 | \text{Não escolheu Ch1}_1) \\ &\quad \times P(\text{Escolher Ch1}_3 | \text{Não escolheu Ch1}_1 \text{ e Não escolheu Ch1}_2) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- Probabilidade de abrir a porta à 4.^a tentativa:

$$\begin{aligned} P(\text{Não escolher Ch1}_1 \text{ e Não escolher Ch1}_2 \text{ e Não escolher Ch1}_3 \text{ e Escolher Ch1}_4) &= P(\text{Não escolher Ch1}_1) \times P(\text{Não escolher Ch1}_2 | \text{Não escolheu Ch1}_1) \\ &\quad \times P(\text{Não escolher Ch1}_3 | \text{Não escolheu Ch1}_1 \text{ e Não escolheu Ch1}_2 \text{ e Não escolheu Ch1}_3) \\ &\quad \times P(\text{Escolher Ch1}_4 | \text{Não escolheu Ch1}_1 \text{ e Não escolheu Ch1}_2 \text{ e Não escolheu Ch1}_3) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Na tabela seguinte, resumem-se os resultados obtidos anteriormente:

| N.º tentativa | 1. ^a Tentativa | 2. ^a tentativa | 3. ^a tentativa | 4. ^a tentativa |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| Prob. abrir a porta | 25% | 25% | 25% | 25% |

Conclusão

Afinal, contra a intuição do João, é tão provável abrir a porta à 1.^a tentativa, como à 2.^a, à 3.^a ou à 4.^a.

Assim, o João teria uma probabilidade de 50% de ter as despesas da festa pagas... Nada mau!

Abordagem empírica

Para simular o concurso, como descrito inicialmente, pode-se utilizar a seguinte metodologia, considerando uma folha de cálculo, como o Excel:

1. Na coluna A gera-se um número aleatório inteiro entre 1 e 4, inclusive, para simular a chave escolhida na 1.^a tentativa. Na coluna B, testa-se se o valor obtido é 1, que corresponde à chave certa;
2. Se no passo 1, não se obteve o valor 1, então na coluna C, gera-se um número aleatório inteiro entre 1 e 3, inclusive, para simular a chave escolhida na 2.^a tentativa. Na coluna D testa-se se o valor obtido é 1, que corresponde à chave certa.
3. Se nos passos 1 e 2, não se obteve o valor 1, então na coluna E gera-se um número aleatório inteiro entre 1 e 2, inclusive, para simular a chave escolhida na 3.^a tentativa. Na coluna F testa-se se o valor obtido é 1, que corresponde à chave certa.
4. Se nos passos 1, 2 ou 3 não se obteve o valor 1, o que é testado na coluna G, então considera-se 1, porque agora já só há a chave 1 para abrir a porta.

A seguir é apresentada parte da folha de Excel, com as fórmulas correspondentes aos passos 1, 2, 3 e 4:

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|------------------|---------------------|-------------------------------|---------------------|----------------------------------|---------------------|-------------------------------------|
| 1 | | 1 ^a tent | | 2 ^a tent | | 3 ^a tent | 4 ^a tent |
| 2 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A2=1;1;0) | =IF(A2=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C2=1;1;0) | =IF((B2+D2)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E2=1;1;0) | =IF((B2+D2+F2)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 3 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A3=1;1;0) | =IF(A3=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C3=1;1;0) | =IF((B3+D3)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E3=1;1;0) | =IF((B3+D3+F3)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 4 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A4=1;1;0) | =IF(A4=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C4=1;1;0) | =IF((B4+D4)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E4=1;1;0) | =IF((B4+D4+F4)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 5 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A5=1;1;0) | =IF(A5=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C5=1;1;0) | =IF((B5+D5)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E5=1;1;0) | =IF((B5+D5+F5)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 6 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A6=1;1;0) | =IF(A6=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C6=1;1;0) | =IF((B6+D6)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E6=1;1;0) | =IF((B6+D6+F6)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 7 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A7=1;1;0) | =IF(A7=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C7=1;1;0) | =IF((B7+D7)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E7=1;1;0) | =IF((B7+D7+F7)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 8 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A8=1;1;0) | =IF(A8=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C8=1;1;0) | =IF((B8+D8)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E8=1;1;0) | =IF((B8+D8+F8)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 9 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9=1;1;0) | =IF(A9=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9=1;1;0) | =IF((B9+D9)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9=1;1;0) | =IF((B9+D9+F9)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |

...

| | A | B | C | D | E | F | G |
|-------|------------------|-------------------|-----------------------------------|-------------------|--|-------------------|---|
| 9993 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9993=1;1;0) | =IF(A9993=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9993=1;1;0) | =IF((B9993+D9993)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9993=1;1;0) | =IF((B9993+D9993+F9993)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 9994 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9994=1;1;0) | =IF(A9994=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9994=1;1;0) | =IF((B9994+D9994)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9994=1;1;0) | =IF((B9994+D9994+F9994)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 9995 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9995=1;1;0) | =IF(A9995=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9995=1;1;0) | =IF((B9995+D9995)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9995=1;1;0) | =IF((B9995+D9995+F9995)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 9996 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9996=1;1;0) | =IF(A9996=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9996=1;1;0) | =IF((B9996+D9996)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9996=1;1;0) | =IF((B9996+D9996+F9996)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 9997 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9997=1;1;0) | =IF(A9997=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9997=1;1;0) | =IF((B9997+D9997)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9997=1;1;0) | =IF((B9997+D9997+F9997)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 9998 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9998=1;1;0) | =IF(A9998=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9998=1;1;0) | =IF((B9998+D9998)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9998=1;1;0) | =IF((B9998+D9998+F9998)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 9999 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A9999=1;1;0) | =IF(A9999=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C9999=1;1;0) | =IF((B9999+D9999)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E9999=1;1;0) | =IF((B9999+D9999+F9999)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 10000 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A10000=1;1;0) | =IF(A10000=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C10000=1;1;0) | =IF((B10000+D10000)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E10000=1;1;0) | =IF((B10000+D10000+F10000)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 10001 | =INT(RAND()*4)+1 | =IF(A10001=1;1;0) | =IF(A10001=1;0;(INT(RAND()*3)+1)) | =IF(C10001=1;1;0) | =IF((B10001+D10001)=1;0;INT(RAND()*2+1)) | =IF(E10001=1;1;0) | =IF((B10001+D10001+F10001)=1;0;INT(RAND()*1+1)) |
| 10002 | | =SUM(B2:B10001) | | =SUM(D2:D10001) | | =SUM(F2:F10001) | =SUM(G2:G10001) |

Foram feitas 10 000 repetições.

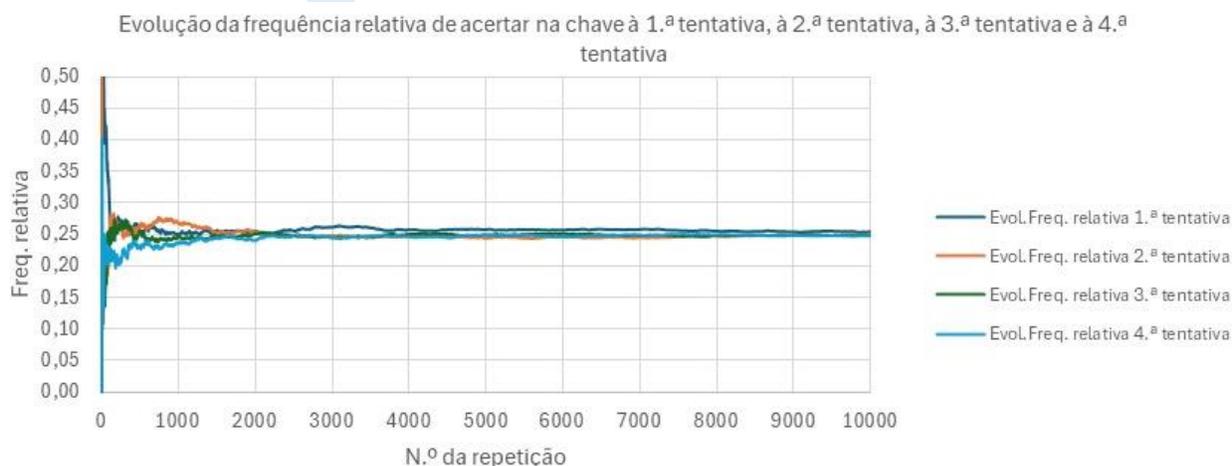
A soma dos valores obtidos nas colunas B, D, F ou G, dá o número de vezes que nestas 10000 repetições a chave certa foi escolhida à 1.ª, 2.ª, 3.ª ou 4.ª tentativa, respetivamente. Os resultados foram os seguintes:

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---------|---|---------|---|---------|---|---------|
| 1 | 1.ªtent | | 2.ªtent | | 3.ªtent | | 4.ªtent |
| 2 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 2 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 3 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 7 | 4 | 0 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 8 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | 1 | 0 |

...

| | A | B | C | D | E | F | G |
|-------|---|------|---|------|---|------|------|
| 9992 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9993 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 9994 | 4 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 9995 | 3 | 0 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 9996 | 4 | 0 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 9997 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 | 1 |
| 9998 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 9999 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10000 | 3 | 0 | 2 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 10001 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10002 | | 2541 | | 2493 | | 2489 | 2477 |

O gráfico de linhas seguinte mostra a evolução da frequência relativa da chave certa ter sido escolhida à 1.ª, 2.ª, 3.ª ou 4.ª tentativa:



Conclusão

As quatro frequências relativas estabilizam em 25%, donde concluímos que, de acordo com os resultados obtidos na abordagem teórica, são boas estimativas para as probabilidades pretendidas.

Comparação dos resultados empíricos, com os resultados teóricos

Resumindo os resultados obtidos anteriormente, temos para as probabilidades do pai do João emprestar a casa e pagar as despesas, ou só emprestar a casa, os seguintes valores e respetivas estimativas:

| | Emprestar a casa e pagar as despesas | Emprestar a casa |
|---------------------------------|--------------------------------------|------------------|
| Probabilidade | 50% | 50% |
| Estimativa para a probabilidade | 50% | 50% |